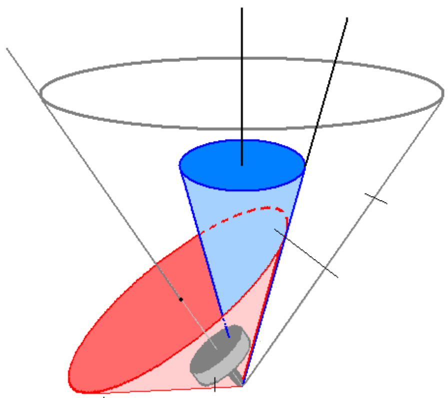
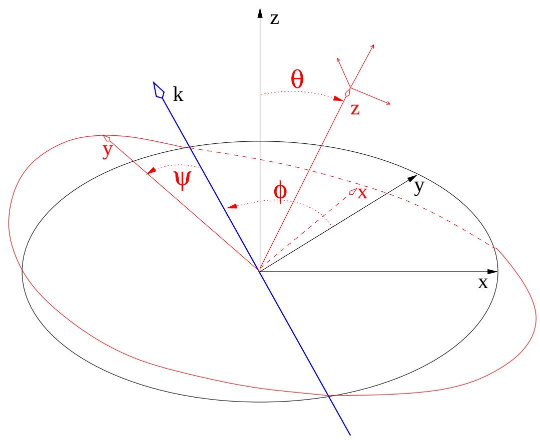
Übung 14 zur Vorlesung Theoretische Physik I (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org ∧ michael@karbach.org)
.
Gunar Ernis (ernis@physik.uni-wuppertal.de)
Dominic Nawrath (nawrath@uni-wuppertal.de)

Abgabe: 03.02.09
Besprechung: 05.02.09
G.11.06a
D.09.01

1. Die Winkel und Drehwinkel des symmetrischen Kreisels (20)





Die Euler-Winkel sind gegeben durch:

Körperfestes r-System: (x,y,z) gilt: $\vec{e}_k = \begin{pmatrix} \sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_Z = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$

Raumfestes $q - System$: (X,Y,Z) gilt: $\vec{e}_k = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

Die Drehachse ist gegeben durch:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_Z + \dot{\theta}\vec{e}_k + \dot{\psi}\vec{e}_z$$

Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ im raumfesten Koordinatensystem entlang der z-Achse verlaufe. Im körperfesten Koordinatensystem sei der Trägheitstensor gegeben durch $\mathsf{I}_r = \mathrm{diag}(I_\perp, I_\perp, I_\parallel)$.

(a) Zerlege die Drehachse $\vec{\omega}_r$ entsprechend den Trägheitsmomenten in Komponenten $\vec{\omega}_\perp$ und $\vec{\omega}_\parallel$ und gebe diese explizit als Funktion der Euler-Winkel an und veranschauliche das Ergebnis.

(b) Drücke den Drehimpuls $\vec{L}_r = \vec{L}_\parallel + \vec{L}_\perp$ und $|\vec{L}_r|$ durch die longitudinalen ($\parallel$) und transversalen ($\perp$) Größen aus und ebenso die kinetische Energie $T_r = T_\parallel + T_\perp$.

(c) Der Winkel α sei der Winkel zwischen $\vec{L}_r$ und $\vec{\omega}_r$, zeige dass gilt:

$$\cos\alpha = \frac{I_\perp \frac{\omega_\perp^2}{\omega^2} + I_\parallel \frac{\omega_\parallel^2}{\omega^2}}{\sqrt{I_\perp^2 \frac{\omega_\perp^2}{\omega^2} + I_\parallel^2 \frac{\omega_\parallel^2}{\omega^2}}} = \frac{\omega_\perp}{\omega} \frac{1 + \frac{T_\parallel}{T_\perp}}{\sqrt{1 + \frac{L_\parallel^2}{L_\perp^2}}}$$

(d) Sei β der Winkel zwischen der Figurenachse $\vec{e}_z$ und der Drehachse $\vec{\omega}_r$. Drücke $\cos\alpha$ durch β aus.

(e) Zeige, dass gilt:

$$\cos\theta = \frac{I_\parallel \frac{\omega_\parallel}{\omega}}{\sqrt{I_\perp^2 \frac{\omega_\perp^2}{\omega^2} + I_\parallel^2 \frac{\omega_\parallel^2}{\omega^2}}} \quad \wedge \quad \tan\theta = \frac{L_\perp}{L_\parallel}$$

(f) Untersuche den Zusammenhang zwischen α, β und θ.

(g) Betrachte den kräftefreien symmetrischen Kreisel und zeige:

$$\dot{\psi}\sin\beta = \dot{\phi}\sin\alpha$$