Übung 11 zur Vorlesung Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org $\wedge$ michael@karbach.org) Abgabe: 13.01.10
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de) Besprechung 15.01.10, F.13.17

1. Symmetrisierungs- und Antisymmetrisierungsopertoren (7)
Der Symmetrisierungs- und Antisymmetrisierungsopertoren N identischer Teilchen ist definiert durch:

$$\mathcal{S} \doteq \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P} \in S_N} \mathcal{P} \quad \wedge \quad \mathcal{A} \doteq \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P} \in S_N} (-)^p \mathcal{P}$$

Zeige die Eigenschaften:

(a)
$$\mathcal{S}^\dagger = \mathcal{S} \quad \wedge \quad \mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$$

(b)
$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{S} \quad \wedge \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$$

(c)
$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{S} = 0 \quad \wedge \quad \mathcal{A} + \mathcal{S} \neq \mathbf{1}, \quad (N > 2)$$

(d)
$$\mathcal{P}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{P} = \mathcal{S} \quad \wedge \quad \mathcal{P}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P} = (-)^p\mathcal{A}, \qquad \forall \mathcal{P} \in S_N$$

2. Symmetrie identischer Teilchen I (6)
Sei $\mathcal{H}^N$ der Produktraum eines Systems von N ununterscheidbaren Teilchen:

$$\mathcal{H}^N = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

Sei $\mathcal{P}$ ein Permutations-Operator:

$$\mathcal{P}|\xi_1, ..., \xi_N\rangle = |\xi_{\mathcal{P}1}, ..., \xi_{\mathcal{P}N}\rangle = |\eta_1, ..., \eta_N\rangle.$$

Für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^N$ unterscheiden wir die Unterräume der total symmetrischen ($\mathcal{H}_+^N$) bzw. total antisymmetrischen ($\mathcal{H}_-^N$) Zustände, die definiert sind durch:

$$\mathcal{H}_+^N \doteq \{|\psi\rangle \in \mathcal{H}^N \mid \mathcal{P}|\psi\rangle = |\psi\rangle\} \quad \wedge \quad \mathcal{H}_-^N \doteq \{|\psi\rangle \in \mathcal{H}^N \mid \mathcal{P}|\psi\rangle = (-)^p|\psi\rangle\},$$

dabei ist p gerade für eine gerade Permutation und ungerade für eine ungerade Permutation.

(a) Zeige, dass ein Zustand aus dem Unterraum $\mathcal{H}_\pm^N$ geschrieben werden kann als:

$$\mathcal{H}_+^N \ni |\xi_1, ..., \xi_N\rangle_+ = c_+^N \sum_{\mathcal{P} \in S_N} \mathcal{P}|\xi_1, ..., \xi_N\rangle \quad \wedge \quad \mathcal{H}_-^N \ni |\xi_1, ..., \xi_N\rangle_- = c_-^N \sum_{\mathcal{P} \in S_N} (-)^p \mathcal{P}|\xi_1, ..., \xi_N\rangle.$$

und bestimme die Normierungskonstante $c_\pm^N$, wobei die Einteilchenzustände normiert sind.

(b) Zeige, dass kein physikalischer Operator $\mathbf{O}$ Zustände aus einem Unterraum in den anderen transformieren kann:

$$\langle\psi_-^1|\mathbf{O}|\psi_+^2\rangle = 0 \qquad \forall\, |\psi_-^1\rangle \in \mathcal{H}_-^N, \quad |\psi_+^2\rangle \in \mathcal{H}_+^N.$$

(c) Untersuche speziell für $N = 2$ und $N = 3$ explizit, ob die Unterräume $\mathcal{H}_\pm^N$ den gesamten Raum $\mathcal{H}^N$ aufspannen.

3. Bosonen und Fermionen im Potentialtopf (7)
Betrachte einen unendlich tiefen Potentialtopf der Breite $2L$,

$$U(x) = \begin{cases} 0, & -L \leq x \leq +L \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Im Potential befinden sich zwei Bosonen(Fermionen) mit parallelen Spins. Das bedeutet, dass der Zweiteilchen-Zustand im Spinraum symmetrisch ist und beide Teilchen dieselbe Spin-Quantenzahl besitzen. Berechne die Grundzustandsenergie des Systems und die zugehörige Ortswellenfunktion.
Hinweise: (i) Verwende als Randbedingung, dass die Wellenfunktion an den Wänden identisch verschwindet. (ii) Die Lösung kann geeignet aus den Lösungen des Einteilchen-Problems aufgebaut werden.