



Übung 10 zur Vorlesung Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (<http://www.karbach.org> \wedge michael@karbach.org)
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de)

Abgabe: 06.01.10
Besprechung 08.01.10, F.13.17

1. TEILCHEN IM OSZILLATORPOTENTIAL (5)

Betrachte ein Teilchen im Oszillatorpotential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

dessen Zustand durch den Dichteoperator

$$\rho = \frac{1}{\varrho_0} \exp(-\beta \mathbf{H}), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

charakterisiert ist.

- Berechne den Normierungsfaktor ϱ_0 .
- Untersuche, ob ρ einen reinen Zustand beschreibt.
- Berechne den Erwartungswert für die Energie.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Energiemessung den Wert $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ zu erhalten.
- Diskutiere den Erwartungswert der Energie als Funktion der Temperatur.

2. STATISTISCHER OPERATOR (5)

Im Zustandsraum eines Zweiniveausystems kann jeder Operator mittels Paulimatrizen σ_α dargestellt werden als

$$\rho = \rho_0 \mathbf{1} + \vec{\rho} \cdot \vec{\sigma}, \quad \rho_0, \rho_\alpha \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

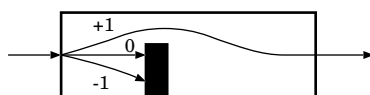
- Welche Eigenschaften haben die Koeffizienten ρ_0 und $\vec{\rho}$, wenn ρ ein statistischer Operator ist?
- Der Hamiltonoperator sei $\mathbf{H} = -\gamma \sigma_z$. Bestimme die 3×3 -Matrix $\mathbf{R}(t)$ in

$$\vec{\mathbf{S}}(t) \doteq \text{Sp} \left[\exp\left(\frac{it}{\hbar} \mathbf{H}\right) \vec{\sigma} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \mathbf{H}\right) \rho \right] = \mathbf{R}(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}(0) \quad (2)$$

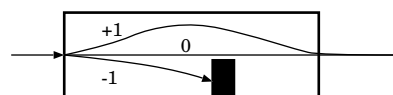
und interpretiere das Ergebnis.

3. STERN-GERLACH-VERSUCH (5)

Ein Strahl nicht polarisierter, neutraler Spin 1-Teilchen falle gemäß der nachstehenden Abbildung auf einen modifizierten Stern-Gerlach-Apparat:



(a) Projektion auf den Zustand $|+1\rangle$



(b) Projektion auf den Unterraum der Zustände $|0\rangle$ und $|+1\rangle$

- Gib den statistischen Operator ρ der einfallenden Teilchen an und bestimme für die Fälle (a) und (b) den statistischen Operator ρ' für die auslaufenden Teilchen.
- Berechne jeweils die Spur von $(\rho')^2$ und interpretiere die Ergebnisse.

4. DICHTOPERATOREN (5)

Gegeben seien die beiden Matrizen:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Zeige, dass ρ_1 und ρ_2 quantenmechanische Dichteoperator darstellen. Worin unterscheiden sich ρ_1 und ρ_2 physikalisch?
- Berechne $\langle \sigma_\alpha \rangle_{\rho_i}$, $i = 1, 2$ für $\alpha = 1, 2, 3$.
- Geben Sie ein Experiment an, mit dessen Hilfe man entscheiden kann, ob das System durch ρ_1 oder durch ρ_2 beschrieben wird.