Übung 8 zur Vorlesung Theoretische Physik I (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org ∧ michael@karbach.org) Abgabe: 09.12.08
. Besprechung: 11.12.08
Gunar Ernis (ernis@physik.uni-wuppertal.de) G.11.06a
Dominic Nawrath (nawrath@uni-wuppertal.de) D.09.01

1. Teilchen im elektromagnetischen Feld (5)
Betrachte die Bewegung eines Teilchens mit der Masse m und Ladung e in einem Potential:

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \doteq e\Phi(\vec{r}, t) - e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Dabei ist Φ das skalare Potential und $\vec{A}$ das Vektorpotential.

   (a) Leite aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen für das Teilchen ab.

   (b) Schreibe die Bewegungsgleichungen um, indem die Potentiale Φ und $\vec{A}$ durch das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ersetzt werden, wobei gelten soll:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \doteq -\left(\nabla\Phi(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}\right) \quad \wedge \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \doteq \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$

2. Legendre-Transformation (9)
Betrachte ein Teilchen für $q \geq 0$, welches beschrieben wir durch den folgenden Hamiltonian:

$$H(q, p) \doteq \frac{p^2}{2m} e^{-q/a}, \qquad a > 0.$$

Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung $q(0) = 0$ und hat einen Anfangsimpuls $p(0) = mv$

   (a) Löse die Hamilton-Gleichungen und gib $q(t)$ und $p(t)$, sowie die daraus folgenden Größen $\dot{q}(t)$ und $\dot{p}(t)$ explizit an und diskutiere das Ergebnis

   (b) Wie lautet die kinetische Energie T und die Gesamtenergie als Funktion der Zeit?

   (c) Transformiere $H(q, p)$ durch eine Legendretransformation auf die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}) = T - U$ und gibt explizit das Potential U an.

   (d) Zeige, dass die verallgemeinerte Kraft proportional zu $\dot{q}^2$ ist, insgesamt aber konstant ist.

3. Zentralsymmetrischer harmonischer Oszillator (6)
Die Lagrange-Funktion des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{k}{2}\vec{r}^2 \tag{1}$$

   (a) Wie lautet L in Kugelkoordinaten?

   (b) Berechne daraus die Hamilton-Funktion!

   (c) Gib die kanonischen Bewegungsgleichungen an. Welche Größen sind erhalten?

   (d) Zeige, dass die Kreisbahn eine mögliche Lösung ist. Wie groß ist der Radius als Funktion der erhaltenen Impulse und der Energie?

 Eine Nikolaus-Bonusaufgabe ...

4. Geschwindigkeitsabhängiges Potential (5)
Betrachte ein Teilchen der Masse m, dass sich im geschwindigkeitsabhängigen Potential:

$$U(q, \dot{q}) = -\frac{\kappa}{2} q^2 \dot{q}^2$$

bewegt und sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort q_0 befindet und die Geschwindigkeit v_0 besitzt. Gib den Hamiltonian an und und stelle die Hamilton-Gleichungen auf und bestimme die Geschwindigkeit $\dot{q}$ als Funktion des Ortes q.