Übung 7 zur Vorlesung
Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org ∧ michael@karbach.org)
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de)

Abgabe: 02.12.09
Besprechung 04.12.09, F.13.17

1. der Landéfaktor (5)
   Betrachte ein beliebiges Atom mit Gesamtbahndrehimpuls **L** und Gesamteigendrehimpuls **S** in einem homogenen äußeren Magnetfeld $h\vec{e}_z$. Der Gesamtdrehimpuls sei $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Den Drehimpulsen werden in der üblichen Weise die Quantenzahlen J, L, S zugeordnet. Betrachte einen festen Zustand $|J, L, S, \alpha\rangle$. Dieser spaltet wegen der Wechselwirkungsenergie $\mu_B \mathbf{h} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})$ im Magnetfeld auf. Zeige, dass die erste Korrektur der Energie nach der Störungsrechnung
   $$\Delta E = \mu_B h J_z \left(1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}\right) \tag{1}$$
   beträgt. Der Faktor in (1) ist in der Literatur als Landéfaktor bekannt.

2. Drehung einer Observablen (8)
   Sei $\vec{\mathbf{Q}}$ eine Observable in kartesischen Koordinaten. Die Drehung dieser Observablen um den Winkel α wird durch die Transformation
   $$\vec{\mathbf{Q}} \mapsto \vec{\mathbf{Q}}' = \mathbf{R}^i(\alpha)[\vec{\mathbf{Q}}] = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha}{\hbar}\mathbf{L}_i\right) \circ \vec{\mathbf{Q}} \circ \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\alpha}{\hbar}\mathbf{L}_i\right), \qquad 0 \le \alpha < 2\pi, \qquad i = x, y, z \tag{2}$$
   beschrieben. Dabei ist $\vec{\mathbf{L}}$ der Drehimpulsoperator.
   (a) Berechne die Drehung des Ortsoperators $\vec{\mathbf{x}}$ um den Winkel α um die Achse ξ für $\xi = x, y, z$. Zeige exemplarisch, dass **R** tatsächlich eine Drehung beschreibt.
   (b) Sei $|\psi\rangle$ ein Zustand mit der Eigenschaft $\exp(-\mathrm{i}(\alpha/\hbar)\mathbf{L}_\xi)|\psi\rangle = |\psi\rangle$ für $\xi = x, y, z$. Zeige, dass gilt:
   $$i) \quad \langle\psi|\mathbf{Q}_\gamma|\psi\rangle = 0, \qquad \gamma = x, y, z; \qquad ii) \quad \langle\psi|\mathbf{Q}_1^2|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbf{Q}_2^2|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbf{Q}_3^2|\psi\rangle. \tag{3}$$
   Hinweise: Die Exponentialausdrücke in (5) sind über ihre Potenzreihen defininert. Verwende an geigneter Stelle den Satz von Baker-Campbell-Hausdorff,
   $$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_i, \tag{4}$$
   wobei $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_i$ den i-fach verschachtelten Kommutator bezeichnet und $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_0 = \mathbf{B}$ gesetzt wird.

3. Das Heliumatom (7)
   Das Heliumatom kann durch den Hamiltonoperator
   $$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{\mathbf{r}_1} - \frac{2e^2}{\mathbf{r}_2} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{5}$$
   beschrieben werden. Dabei bezeichnen e und m die Ladung und Masse des jeweiligen Elektrons. Spalte die Einelektronenterme
   $$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{(2-\alpha)e^2}{\mathbf{r}_i}, \qquad i = 1, 2 \tag{6}$$
   ab. Damit schreibt sich (5) als $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_{12}$. Die Wechselwirkung der Elektronen ist ausschließlich im dritten Summanden enthalten und soll als Störung behandelt werden.
   (a) Erkläre qualitativ, welche Näherung dem Ansatz (5) zugrund liegt.
   (b) Berechne die Energie des Grundzustandes für den Operator $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ in Abhängigkeit von α.
   (c) Berechne die erste Korrektur des Grundzustandes in Abhängigkeit von α nach der Störungstheorie.
   (d) Bestimme α so, dass die Energie aus (b) ihr Minimum annimmt.
   (e) Vergleiche die so gewonnene Energie mit der experimentell bekannten Ionisationsenergie von Helium.