Übung 6 zur Vorlesung
Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org ∧ michael@karbach.org) Abgabe: 25.11.09
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de) Besprechung 27.11.09, F.13.17

1. Clebsch-Gordon-Koeffizienten (7)
Gegeben ist ein System zweier Teilchen mit dem zusammengesetzten Drehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}$. Die Zustände dieses Systems können durch die gemeinsamen Eigenfunktionen $|JM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses oder durch die Einzeldrehimpulsbasis $|j^{(1)}m^{(1)}; j^{(2)}m^{(2)}\rangle = |j^{(1)}m^{(1)}\rangle \otimes |j^{(2)}m^{(2)}\rangle$ beschrieben werden. Hierbei gilt:

$$|JM\rangle = \sum_{m^{(1)}m^{(2)}} C^{JM}_{m^{(1)}m^{(2)}} |j^{(1)}m^{(1)}; j^{(2)}m^{(2)}\rangle$$

mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten $C^{JM}_{m^{(1)}m^{(2)}}$.

   (a) Für $j^{(1)} = j^{(2)} = 1$ sei der Zustand $|J, M\rangle = |2, 2\rangle$ mit der Darstellung $|2, 2\rangle = |1, 1; 1, 1\rangle$ vorgegeben. Stelle durch mehrfaches Anwenden des Absteigeoperators $\mathbf{J}_-$ die Zustände $|2, 1\rangle$, $|2, 0\rangle$, $|2, -1\rangle$ sowie $|2, -2\rangle$ in der Basis der $|j^{(1)}m^{(1)}; j^{(2)}m^{(2)}\rangle$ dar.

   (b) Der Zustand $|J, M\rangle = |1, 1\rangle$ setzt sich für $j^{(1)} = j^{(2)} = 1$ folgendermaßen zusammen:

$$|1, 1\rangle = \alpha|1, 1; 1, 0\rangle + \beta|1, 0; 1, 1\rangle$$

   Bestimme α und β aus der Normierung und durch Anwendung des Operators $\mathbf{J}^2 = \left(\mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}\right)^2$.

2. Pauli-Matrizen (3)
Zeige

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \imath\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

für beliebige mit $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)^t$ vertauschende Vektoroperatoren $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)^t$ und $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)^t$, deren Komponenten untereinander nicht notwendig vertauschen.

3. Kommutierende Observablen (10)
Die Wechselwirkung zweier Nukleonen sei gegeben durch den Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_1(r) + V_2(r)(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) + V_3(r)(\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}) + V_4(r)\mathbf{S}_{12}.$$

Der Gesamtspin zweier Spin-1/2 Teilchen ist gegeben durch $\mathbf{S} \doteq \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$. Das Tensorpotential lautet:

$$\mathbf{S}_{12} \doteq 4\left(\frac{3(\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{r}^2} - \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(2)}\right).$$

   (a) Zeige die Eigenschaften:

$$\mathbf{S}_{12} = 2\left(\frac{3(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2}{\mathbf{r}^2} - \mathbf{S}^2\right) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{S}_{12}^2 = 4\mathbf{S}^2 - 2\mathbf{S}_{12}$$

   (b) Was bedeutet dies für die Eigenwerte S_{12} des Operators $\mathbf{S}_{12}$?

   (c) Bestimme für die ersten drei Potentialterme separat den maximalen Satz kommutierender Observable und den Entartungsgrad, verwende hierzu $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{j}^{(1)})^2 + (\mathbf{j}^{(2)})^2 + 2\mathbf{j}^{(1)} \cdot \mathbf{j}^{(2)}$ für $\mathbf{J} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}$.