



## Übung 4 zur Vorlesung Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (<http://www.karbach.org>  $\wedge$  michael@karbach.org)  
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de)

Abgabe: 11.11.09  
Besprechung 13.11.09, F.13.17

### 1. WASSERSTOFFATOM (10)

In der Vorlesung wurde die Radialgleichung für das Wasserstoffatom hergeleitet.

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) \right) y_l(r) = 0 \quad (1)$$

- Betrachte den Fall  $E < 0$  und begründe aus den Randbedingungen wieso  $y_l(r) = e^{-\kappa r} r^{l+1} p_l(r)$  mit  $p_l(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} r^{\nu}$  und  $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$  ein guter Ansatz ist.
- Setze den Ansatz in (1) ein und finde eine Rekursionsbeziehung für die  $\beta_{\nu}$ .
- Zeige, dass  $p_l(r)$  abbrechen muss, d.h. ein endliches Polynom ist, da ansonsten die Quadratintegrabilität verletzt ist.
- Bestimme die Abbruchbedingung und gib die Energieeigenwerte an.
- Gib den Entartungsgrad der Energieniveaus an.

### 2. SPINMATRIZEN FÜR $s = 3/2$ (5)

Die Paulimatrizen für einen Spin  $s = 3/2$  lauten

$$J_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- Zeige, dass die Drehimpulsalgebra  $[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$  erfüllt ist.
- Gib explizit das Quadrat  $J^2$  und die Auf- und Absteigeoperatoren  $J_{\pm}$  an.
- Konstruiere ein gemeinsames Eigenvektorsystem von  $J^2$  und  $J_3$ .

*Hinweis:* Es ist zulässig Maple oder Ähnliches zu verwenden.

### 3. BAHNDREHIMPULS (5)

Betrachte die Kugelflächenfunktionen explizit für den Fall  $l = 0, 1$  und berechne die Matrix-Darstellung der Operatoren:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_1)_{m'm} &\equiv \langle Y_l^{m'} | \mathbf{L}_1 | Y_l^m \rangle \\ (\mathbf{L}_2)_{m'm} &\equiv \langle Y_l^{m'} | \mathbf{L}_2 | Y_l^m \rangle \\ (\mathbf{L}_3)_{m'm} &\equiv \langle Y_l^{m'} | \mathbf{L}_3 | Y_l^m \rangle \\ (\mathbf{L}_{\pm})_{m'm} &\equiv \langle Y_l^{m'} | \mathbf{L}_{\pm} | Y_l^m \rangle \end{aligned}$$