Übung 3 zur Vorlesung
Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org ∧ michael@karbach.org)
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de)

Abgabe: 04.11.09
Besprechung 06.11.09, F.13.17

1. Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators (20)
   Der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_3 &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_\phi \\
\mathbf{L}_\pm &= \mathbf{L}_1 \pm \mathrm{i}\mathbf{L}_2 = \hbar e^{\pm \mathrm{i}\phi}\left(\pm\partial_\theta + \mathrm{i}\cot(\theta)\partial_\phi\right) \\
\mathbf{L}^2 &= -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin(\theta)\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right)
\end{aligned}$$

   (a) Berechne in dieser Darstellung die Kommutatoren: $[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}_3]$, $[\mathbf{L}_\pm, \mathbf{L}_3]$.

   (b) Die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators sind die Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}
Y_l^m(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{\mathrm{i}m\phi}P_l^m(\cos\theta), \\
P_l^m(x) &= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x),
\end{aligned}$$

   wobei

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

   die Legendrepolynome sind. Zeige die Eigenschaften

$$\mathbf{L}_3 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi) \tag{1}$$

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta,\phi) \tag{2}$$

$$\mathbf{L}_\pm Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_l^{m\pm1}(\theta,\phi) \tag{3}$$

   Hinweise:
   Für (2) ist es sinnvoll zunächst zu zeigen, dass die Legendre-Funktionen $P_l^m(x)$ Lösung der DGL

$$(1-x^2)\partial_x^2\xi(x) - 2x\partial_x\xi(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\xi(x) = 0 \tag{4}$$

   sind. Zeige zunächst, dass die Legendrepolynome Lösung der DGL

$$(1-x^2)\partial_x^2\xi(x) - 2x\partial_x\xi(x) + l(l+1)\xi(x) = 0 \tag{5}$$

   sind. Definiere $\xi(x) = (x^2-1)^l$ und zeige $(x^2-1)\xi^{(1)}(x) = 2lx\xi(x)$. Differenziere diese Gleichung nun $(l+1)$-mal. Differenziere (5) nun m-fach ($m \geq 0$) nach x und setze für $\xi(x)$ $P_l(x)$ ein. Mit der Substitution $\tau(x) = (1-x^2)^{m/2}\partial^m P_l(x)$ ergibt sich

$$(1-x^2)\partial_x^2\tau(x) - 2x\partial_x\tau(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\tau(x) = 0$$

   Folgere nun, dass die Legendre-Funktionen Lösung der DGL (4) sind. Für negative m kann die Relation (ohne Beweis)

$$P_l^{-m}(x) = (-)^m\frac{(l-m)!}{l+m)!}P_l^m(x) \quad n \in \mathbb{N}_0\ m = -l, \ldots, l$$

   genutzt werden um zu zeigen dass auch P_l^m fur $m < 0$ die DGL lässt.
   Für den Fall $\mathbf{L}_-$ in (3) verwende das Resultat für $\mathbf{L}_+$ und drücke $\mathbf{L}_-\mathbf{L}_+$ durch $\mathbf{L}^2$ und $\mathbf{L}_3$ aus.