Übung 2 zur Vorlesung Theoretische Physik I (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org $\wedge$ michael@karbach.org) Abgabe: 27.10.09
. Besprechung: 29.10.09
Gunar Ernis (ernis@physik.uni-wuppertal.de) G.11.06a
Dominic Nawrath (nawrath@physik.uni-wuppertal.de) D.09.01

1. Wegintegral (6)

   Berechne für jedes der folgenden Vektorfelder die Rotation $\nabla \times \vec{F}$ und die Wegintegrale

   $$\int_\gamma \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

   längs eines Halbkreises um den Ursprung in der x_1-x_2-Ebene für $x_1 \geq 0$:

   (a) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}|\vec{r}|$

   (b) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$
   Dabei sei $\vec{\omega}$ ein beliebiger fester Vektor.

2. Vektorprodukt (4)

   (a) Berechne:
      i. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$
      ii. $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

   (b) Betsimme soweit wie möglich für feste Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Vektor $\vec{x}$ aus der Gleichung:

   $$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$

3. ϵ-Tensor (10)

   Der ϵ-Tensor ist definiert durch:

   $$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & : (i,j,k) \quad \text{zyklische Permutation von (1,2,3)} \\ -1 & : (i,j,k) \quad \text{anti-zyklische Permutation von (1,2,3)} \\ 0 & : \text{zwei Indizes sind gleich} \end{cases}$$

   (a) Zeige, dass das Vektorprodukt mit Hilfe des ϵ-Tensors geschrieben werden kann als:

   $$\vec{a} \times \vec{b}\Big|_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

   wobei die Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes verwendet wurde.

   (b) Zeige mit Hilfe des ϵ-Tensors die Relationen:

   $$i) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \qquad ii) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

   (c) Es gelte die Summenkonvention, zeige die Relationen:

   $$i) \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \qquad ii) \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}.$$

   (d) Berechne mit Hilfe des ϵ-Tensors:
      i.
      $$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w})$$
      ii.
      $$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w})$$