Übung 1 zur Vorlesung
Theoretischen Physik 3 (BoAS) im WS 2009/10

Michael Karbach (http://www.karbach.org ∧ michael@karbach.org) Abgabe: 22.10.09
Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de) Besprechung 23.10.09, F.13.17

1. Nicht-kommutierende Observable (10)
Es seien $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ zwei hermitsche Operatoren mit dem Kommutator $[\mathbf{Q},\mathbf{P}] = i\hbar$. Der Translationsoperator $\mathbf{T}$ wird definiert über

$$\mathbf{T}(\lambda) = \exp\left(-\frac{i\lambda\mathbf{P}}{\hbar}\right). \tag{1}$$

   (a) Zeige, dass sein Inverses durch $\mathbf{T}^{-1}(\lambda) = \mathbf{T}(-\lambda)$ gegeben ist.
   (b) Zeige, dass der Translationsoperator unitär ist.
   (c) Zeige die Kommutatorrelation $[\mathbf{Q},\mathbf{T}(\lambda)] = \lambda\mathbf{T}(\lambda)$.
   (d) Zeige die Additionseigenschaft $\mathbf{T}(\lambda)\mathbf{T}(\mu) = \mathbf{T}(\lambda+\mu)$.
   (e) Zeige, dass jede reelle Zahl im Spektrum von $\mathbf{Q}$ liegt.
   (f) Zeige, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{Q}$ denselben Entartungsgrad aufweisen.
   (g) Betrachte eine differenzierbare Funktion $f(x)$ und die explizite Darstellung der Operatoren: $\mathbf{Q} = x$ sowie $\mathbf{P} = -\imath\hbar\, d/dx$. Berechne die Wirkung von $\mathbf{T}(\lambda)$ auf die Funktion $f(x)$ und interpretiere das Ergebnis.

2. Das Heisenberg-Bild (10)
Wir diskutieren die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems, welches durch einen hermitschen Operator $\mathbf{H}$ beschrieben wird. Das System befinde sich in einem Zustand $|\psi(t)\rangle_{t=0} = |\psi_0\rangle$. Wir postulieren nun die Existenz eines unitären Operators $\mathbf{U}(t)$ mit den Eigenschaften:

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{1}, \tag{2}$$
$$\mathbf{U}(t_1+t_2) = \mathbf{U}(t_1)\mathbf{U}(t_2), \tag{3}$$
$$\mathbf{H} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dt}\,\mathbf{U}(t)|_{t=0}\,, \tag{4}$$

sowie dem Postulat, dass sich das System zum Zeitpunkt t in einem Zustand befindet, der gegeben ist durch:

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}^\dagger(t)|\psi(0)\rangle. \tag{5}$$

   (a) Motiviere diese Postulate aus physikalischer Sicht.
   (b) Gib die explizite Darstellung von $\mathbf{U}(t)$ an.
   (c) Zeige, dass aus den Postulaten (1)-(4) die Schrödinger Gleichung folgt.
   (d) Was folgt für die Norm des Zustandes $|\psi(t)\rangle$?
   (e) Betrachte nun den zeitabhängigen Operator:

$$\mathbf{A}_H(t) \equiv \mathbf{U}(t)\mathbf{A}\mathbf{U}(t)^\dagger. \tag{6}$$

   Zeige hiermit die Heisenberg Gleichung:

$$i\hbar\frac{d\mathbf{A}_H(t)}{dt} = [\mathbf{A}_H(t),\mathbf{H}]. \tag{7}$$

   (f) Berechne den Kommutator:

$$[\mathbf{x}_H(t),\mathbf{p}_H(t)].$$

   (g) Betrachte den harmonischen Oszillator:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{mw^2}{2}\mathbf{x}^2,$$

   und bestimme $\mathbf{x}_H(t)$ und $\mathbf{p}_H(t)$ durch Lösen von (7). Vergleiche dieses Ergebnis mit der expliziten Darstellung (6).